

<中学校数学>

問題把握力を高める数学的な表現指導の工夫

-文脈を図式化する活動を通して-

宜野湾市立宜野湾中学校 教諭 吉野 典子

目次

I	テーマ設定の理由	1
II	研究仮説	1
III	研究構想図	2
IV	研究内容	3
1	問題解決とは	
(1)	「問題解決」と「問題把握」の重要性	
(2)	問題解決能力とは	
(3)	問題解決の授業とは	
(4)	幾何における問題把握	
2	メタ認知とは	
3	数学的表現体系とは	
(1)	数学教育における表現様式の分類と表現体系	
(2)	ひらめきシートとは	
V	検証授業	9
1	単元名	
2	教材名	
3	単元の目標	
4	単元の評価規準	
5	単元について	
(1)	教材観	
(2)	生徒観	
(3)	指導観	
6	単元の内容構造図	
7	単元の指導・評価計画	
8	本時の指導	
(1)	本時のねらい	
(2)	授業仮説	
(3)	本時の展開	
(4)	板書計画	
VI	仮説の検証	17
(1)	ひらめきシートによる検証	
(2)	授業実践と生徒観察による検証	
(3)	アンケートから見えた検証	
(4)	検証のまとめ	
VII	研究の成果と今後の課題	20
1	研究の成果	
2	今後の課題	
	〈主な参考文献・URL〉	

＜中学校数学＞

問題把握力を高める数学的な表現指導の工夫

一文脈を図式化する活動を通して

宜野湾市立宜野湾中学校 教諭 吉野 典子

I テーマ設定の理由

数学科における思考力や表現力の育成は、従来から一貫して重視されてきた。現行の学習指導要領の目標でも「表現する能力を高める」といった表現力の育成に関わる記述が、より強調されている。このような改訂に至った背景に「自分の考えを数学的に表現すること」への課題がある。また、平成 27 年度全国学力・学習状況調査(以下、全国学調とする)「数学」の主な特徴の一つに「数学的な表現を用いた理由の説明、図形の性質を用いた方法の説明に課題がある」とした分析結果も出た。本校の全国学調を見ると、4 領域中「関数」「図形」「資料の活用」の 3 領域が県平均よりも低い結果であった。この領域は沖縄県学力到達度調査でも同様の傾向が見られた。さらに、数学に関する生徒質問で県平均を下回ったのは「数学の授業で学習したことを普段の生活の中で活用できないか考えますか」と「数学の授業で問題を解くとき、もっと簡単に解く方法はないですか」の 2 点であった。

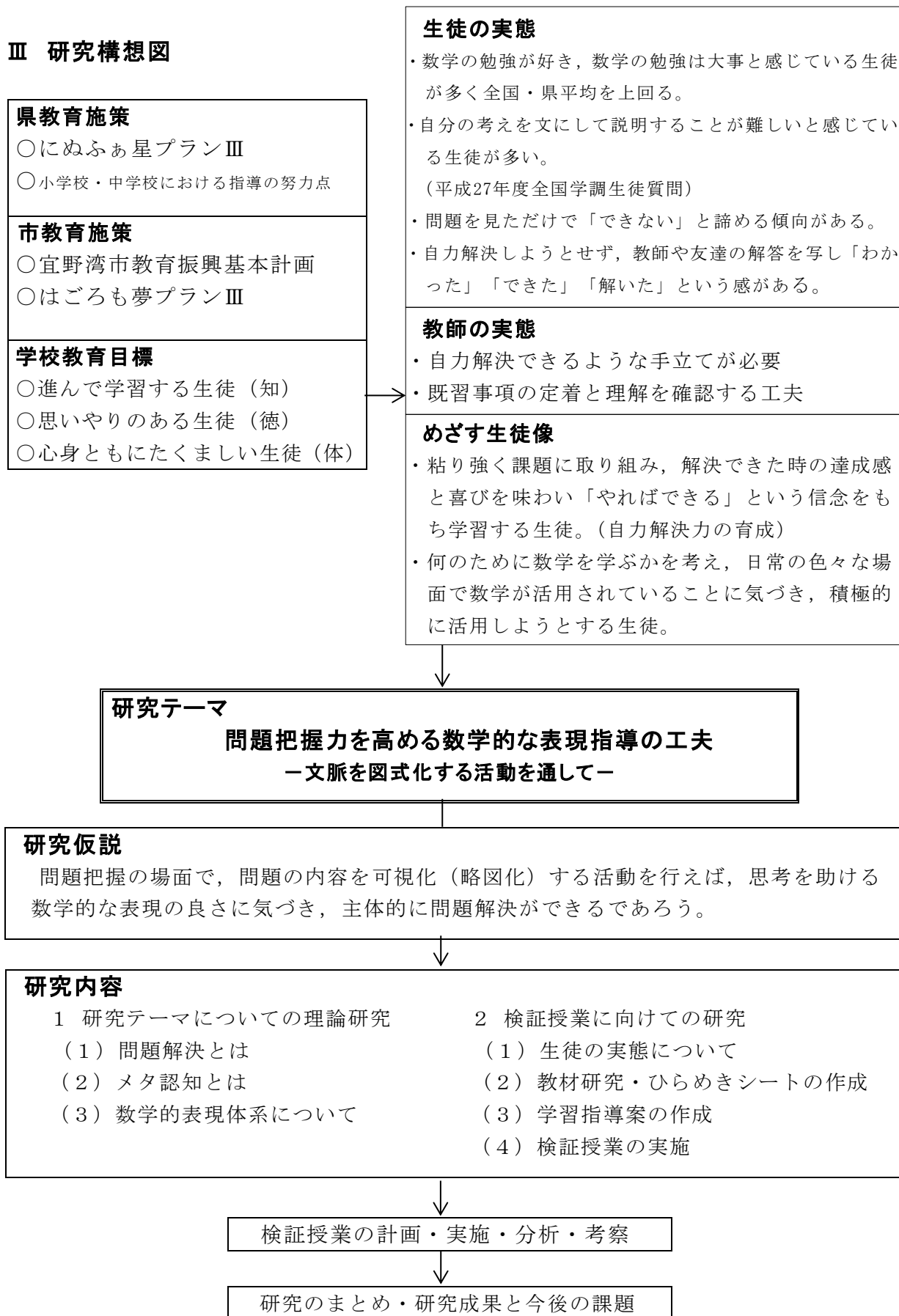
そうした視座から今日までの指導を振り返ると「知識・技能」の伝達に重点が置かれ、既習事項の定着を確認する場面が少ないまま進めていた。これは、授業における自力解決の手立てが不十分で活用まで至っていないことを意味する。また、生徒の実態として、自分の考えを説明することが難しいと感じ、問題を見ただけで「できない」と諦めてしまったりする傾向がある。これらの生徒には、問題状況を表す図や数式などを略図化し解決の糸口を見つけようとする姿が見られない。教師や友達の解答を写し「わかった」「できた」と、十分理解しないままになっている。このような受動的態度では、自力解決する力は育たない。その打開策として、数学的な表現を使い、自力解決が図れるような方法について研究を深める必要がある。

そこで、本研究では落ち込みのある「図形」の領域で、問題理解プロセスの促進を行う。そのために、自力解決の前段階で見通しをもたせる工夫と図形の意味を理解する上で基礎となる表現活動を重視する。問題文を読むだけでは理解できないが、文脈から自分自身の問題解決に必要な情報を可視化する活動を通して、図形をかいたり挿入したりすることで、何を聞かれているのか、わかっていることは何か、今何がしたいのか、何を答えるのか、などの整理が可能になり、問題解決のきっかけが生徒一人一人に育まれていくのではないかと考える。このような場面を意図的に設定することで、問題把握力が高まり、自力解決につながるものと考え、本テーマを設定した。

II 研究仮説

問題把握の場面で、問題の内容を可視化(略図化)する活動を行えば、思考を助ける数学的な表現の良さに気づき、主体的に問題解決ができるであろう。

Ⅲ 研究構想図



IV 研究内容

1 問題解決とは

(1) 「問題解決」と「問題把握」の重要性

ポリア (Polya, 1949) は問題を解決するために「問題を理解する」「計画を立てる」「計画を実行する」「振り返る」という以下のような4段階モデルを提唱した。これは、問題の解き方に一般的な形を与えた最初のモデルともいわれている。

問題解決では、ある問題に直面している生徒にとって、それが自分自身の「問題」として受け止めているかどうか重要であり、スタート地点になっていることが見て取れる。そして、問題解決が行われるとき、自己への問いかけと解決の方略がリンクしており、それと同時にメタ認知的スキルも必要になってくる。よって、メタ認知についても今回の研究で調べる必要がある。

このモデルが示すように「問題解決学習」とは、生徒が進んで問題を考え、主体的に取り組み、問題を解決していく働きを促す教育方法の一形態を示している。また、自己を見つめながら学習していくことで解決の糸口をつかみ、問題と向き合う習慣を作り、問題解決能力を高めることにもなる。すなわち、問題解決学習の意図するところは、問題解決を通して内容の把握力と問題解決能力の育成と捉えられる。

そこで、問題解決能力とは具体的に何を指し、どのようにすれば身につくのか、などの疑問が浮上する。また、現代の問題解決能力とは何か、どのようにすれば学習者に問題解決能力を身に付けさせることができるのかを考えてみたい。

表1 ポリアの問題解決学習〈4段階モデル〉

段階	方略	自己への問いかけ
①問題を理解すること START	・図形を描く ・適当な記号を導入する ・条件の各部分を分離する	何がわかっているか データは何か 条件は何か
②計画を立てること	・データと未知のものとの関連性を見つける	以前、見たことがあるか 関連した問題を知っているか
③計画を実行すること	・各段階を検討する	各手順は正しいか 各手順が正しいことを証明できるか
④振り返ってみること GOAL	・解決策を検討する	結果が正しいか試すことができるか 同じ結果を違った仕方で行うことができるか その結果や方法を何か他の問題に利用することができるか

(2) 問題解決能力とは

OECD (PISA2012 年調査) は、問題解決能力を「解決の方法が直にはわからない問題状況を理解し、問題解決のために、認知的プロセスに関わろうとする個人の能力であり、そこには建設的で思慮深い市民として、個人の可能性を実現するために、自ら進んで問題状況に関わろうとする意思も含まれる」と定義した。

一方、北俊夫 (2012) は問題解決能力を「問題発見力、学習計画の作成力、自立解決力、自己評価力」などとし、「こうした具体的な能力は、教科等の学習場面で求められ、発揮されるだけではなく、日常生活や社会において問題場面に遭遇しても、それらを主体的に解決し必要となる能力」としている。

これからの社会は、様々な情報が氾濫し、それらの情報の価値判断を自ら行うことが求められる。それと同時に、よりよい社会を築いていくために新たな問題を見出し、解決していく力が必要になってくる。そして、学校、地域、企業などのあらゆる場において、こうした問題解決能力を有した人材の育成が望まれる。数学の学習で育成すべき「問題解決能力」は、問題を解くために必要なスキル (知識と技能) の習得、解いた問題をいかに多くの場面で活用できるか。という視点で育成しなければならないと考える。

すなわち、問題解決の「問題」は、生徒にとって今までに学習したことを直接当てはめるだけでは解けないものや、既知のことを組み合わせたり、見方を変えたりしないと解決しないものなど様々な形で表れる。しかし、このような状況だからこそ、本当に必要な情報を選択し解決をスムーズに行う必要がある。「問題をいくつかの部分にわけてみると、そのどれかが解けるかもしれない」「単純な問題場面にして考えてみると、解決できるかもしれない」「おおざっぱでいいから、とりあえず解答を予想してみよう。その後で、それを検討してみると、解決策が見えるかもしれない」などの考えを引き出せたら、問題の第一歩が踏みだせる。それは、問題把握を意味する。問題を解決するには、まず問題を「正しく」認識する必要がある。しかし、現実には、誤った認識をしていたり、うまく必要な情報を抜き出せなかったり、問題解決学習の流れに支障をきたしていることがある。生徒の問題解決能力が育まれるプロセスとして、表 2 に示す 9 つの流れを押さえておく。そこで、具体的に問題解決能力を授業で育むために、どのような授業展開を行えばいいのか、まとめた。

表 2 生徒の「問題解決能力」を育む 9 つのプロセス

①ある事象や課題、問題等と出会う。	
②漠然とした疑問や問題意識が生じる。	
③かかわり合うことを通して、自分の問題としてとらえ始める。	(問題発見)
④疑問を解かずにはいられない意識が芽生える。	
⑤既有の知識・理解・経験等を基に、解決する見通しを立てる。	(解決計画)
⑥解決に向けて調査・実験・観察等の作業を行う。	(問題解決)
⑦情報を収集し、客観的な知識・理解を獲得する。	
⑧解決された内容について相互に発信する。	(共有化)
⑨発表や話し合い等を通じて、新たな問題を見出す。	(深化)

(3) 問題解決の授業とは

相馬一彦(2009)は「問題解決の授業」を問題の解決過程を重視する学習指導として位置づけ、問題を提示することから授業を始め、問題の解決過程で新たな知識や技能、数学的な見方や考え方などを同時に身に付けさせていく学習指導と定義した。

一方、市川伸一(2012)は「教えて考えさせる授業」を打ち出している。生徒が問題解決やコミュニケーション活動を行うには、共通の基礎知識が必要で、そのために工夫された教材や説明で基礎的なことをひとまず全員に教え、理解度を確認し、より深い理解、より高い問題解決にすすむ。それを「新・問題解決学習」と提言した。同時に、よりよく問題解決が生徒に起こるためには学習者の認知過程に配慮しながら、教科内容と学習スキルの習得をはかるという方針で授業に臨むこととしている。日々の授業を振り返ると「知識・技能」の伝達に重点が置かれ、既習事項の定着を確認する場面が少ない。そのため、問題解決の授業を実践するには、問題把握がスムーズにいくような手立てと、理解度を確認する教材の開発が求められる。以下の4項目を配慮事項として、問題解決の授業を行うようにする。

表3 問題解決の授業を展開するための配慮事項

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">①事象や課題、問題等の提示の仕方を工夫し、解決しようという意欲を喚起する。②主体的な学習を通して、思考力、判断力、表現力等の問題解決のための能力を身につけさせる。③自力解決の時間を十分に確保するとともに、個に応じた支援を適切に行うようにする。④問題把握がスムーズにいくような手立ての仕方を工夫し、知識の定着の確認を行う。 |
|---|

(4) 幾何における問題把握

次に、本研究の対象領域である幾何について考察してみたい。OECDは2003年、2007年に次のことを提言した。線、形、物体は、例えば家、校舎、橋、地図、カーナビ（全地球測位システム：GPS）など、どこでも目にすることができる。これらは静的なものや動的なものになっていて、イメージ、実物体あるいはモデルとして再現することができる。「形と空間」は、数学における4つのビッグアイデアの1つとされることは当然のことである。（他の3つのビッグアイデアは「量」「変化と関係」「不確実性」である）生徒は、様々な表現や様々な次元で、形を認識しなければならない。実物大の相対的な位置を理解し、どのように実物大を見るのか、なぜその方法で実物大を見るのかといったことに、気づかなければならない。生徒は、空間を通して、また構造や形を通して、探求することを学ばなければならない。そうすることで、直感的な見方や考え方を養い、自力解決の前段階で見通しを持って課題を解決しようとする態度が育まれる。それは、いろいろな分野での学習においても重要な役目を果たし、論理的に考察し表現する力へと結びつく。本校の生徒は、問題解決のときに、文脈から図をかくことが内容の理解に役立つと感じているが、変換する作業を怠り、解決に至らないことも多い。様々な図形（平面、空間）に慣れ親しみ、かく作業を行うことは、正しく問題把握ができる。そのために「未知なるもの、与えられているもの、条件は何か」という自分の学習をモニタリングするメタ認知的な要素が関連し、自己への問いかけを日常化させる必要が出てくる。

2 メタ認知とは

人が「自分の考え方について考えること」「自分の認知について考えること」という概念がメタ認知であり、多くの学者により提唱されてきた。また、メタ認知が学習を行う上で効果的であることも各種データから分析、立証されている。そして、協同学習を取り入れることがより効果的であることも検証されている。では、数学の問題を解くためにどのようなメタ認知方略が用いられているかという点、計算する、測定する、作図する、グラフをかく、表を作るなど、実に多くの方略が考えられる。前述のポリア(1949)の4段階モデルが示すように、これらの方略は、問題解決の問題把握に相当する部分で、この作業がうまくいかなければ自分が何を聞かれているのか、わかっていることは何かなどの整理ができない状態で問題を見ることになる。つまり、足踏み状態で問題解決をしようとしているようなものである。足踏み状態であるから目的地にはたどり着けず、問題解決はできないことを意味している。重松敬一(1987)は、以下の様にメタ認知を定義した。

表 4 メタ認知の定義 重松(1987)

○メタ認知的知識（メタ知識）	○メタ認知的技能（メタ技能）
認知作用の状態を判断するために蓄えられた環境、課題、自己、方略についての知識 ア 環境に関するメタ知識 環境の状態が、認知作用にどのように影響するかに関する知識 (例) 数学の授業だから、この問題を考えよう。 イ 課題に対するメタ知識 課題の本質が、認知作用にどのように作用するかに関する知識 (例) 前にやった問題は、易しい。 ウ 自己に対するメタ知識 自己の技能・能力が、認知作用にどのように作用するかに関する知識 (例) 式さえわかれば、計算には自信がある。 エ 方略に関するメタ知識 認知作用をよくするための方略に関する知識 (例) わかったことを図にかいたほうがわかりやすい。	メタ知識に照らして認知作用を直接的に調整するモニター、自己評価、コントロール技能 ア モニターに関するメタ技能 認知作用の進行状況を直接的にチェックする技能 (例) 前にやった問題か イ 自己評価に関するメタ技能 認知作用をモニターした結果をメタ知識と照合して直接的に評価する技能 (例) おもしろい ウ コントロールに関するメタ技能 自己評価にもとづいて認知作用を直接的に調節する技能 (例) 図をかけ。 OECD によると、前述の問題解決能力は「複雑で見慣れない非定型型問題 (CUN)」を解く一連のプロセスであり、そのプロセスを学ぶためにメタ認知を教えること

と述べている。このメタ認知指導こそが重要だと述べ、すべての学習で生徒が学習のプロセスや成果をモニタリングし、制御し、振り返ることができるかによって大きく左右されると指摘している。生徒がスムーズに問題解決を行うためには、教師側でメタ認知をどのように用いるかなどのメタ認知教授法やメタ認知足場作りを積極的に取り入れていく必要がある。次の①～⑤の質問はメタ認知的問いかけといわれ、生徒がそれに答えようと説明をするように仕向ける質問である。その質問は、自己への問いかけと課題、認知的反応の間に媒介する役目があるとしている。

- ①確認のための質問：「それはどういう意味か、自分の言葉で説明してください」
- ②考えるための質問：「AとBの違いは何でしょうか」
「もし××ならば、どうなると思いますか」
- ③必要に応じて突っ込む質問：「もっと詳しく話してみてください」
- ④ヒントとなる質問：「△△について考えたことはありますか」
「〇〇はどうすれば(あなたの)助けになると思いますか」
- ⑤メタ認知的質問：「以前知らなかったことについて、どんなことがわかりましたか」
「これをどのように記憶したらいいと思いますか」

3 数学的表現体系とは

生徒に必要な数学的表現について、どのようなものがあるか考察していく。中原忠男(1995)は、数学の問題を解決するための認知方略として数学的表現を用いた。そして、「表現(representation)」というのは、教科書や黒板などに書かれたものすべてを含むと共に、教具や実物等による表現、実験等々も含めるが、話し言葉による表現、会話による表現等はここでは対象にしないことと述べている。

中原の表現は、次の三点の用語を原則として区別し、表現体系では図1のモデルを示している。

表5 数学の外的表象(中原 1995)

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ・表現方法(Representational Method) → 数23をお金で表したり、タイルで表したりした場合などの個々の具体的な表し方 ・表現様式(Representational Mode) → 個々の具体的な表現方法がある観点から分類して、図による表現、記号による表現などとしたそれらの類型 ・表現体系(Representational System) → 表現様式の相互関係を体系的に捉えたもの |
|---|

(1) 数学教育における表現様式の分類と表現体系

〈現実的表現〉(Realistic Representation)

実世界の状況、実物による表現、具体物や実物による実験など

〈操作的表現〉(Manipulative Representation)

具体的な操作活動による表現、人為的加工、モデル化が行われている具体物、教具等に動的操作を施すことによる表現

〈図的表現〉(Illustrative Representation)

絵、図、グラフ等による表現

〈言語的表現〉(Linguistic Representation)

日本では日本語、米国・英国等では英語など、各国の日常言語を用いた表現

〈記号的表現〉(Symbolic Representation)

数字、文字、演算記号、関係記号など数学的記号を用いた表現

表現体系を数学の授業で活用する場合、ある表現様式から他の表現様式と表し変えていくことがしばしば必要になる。

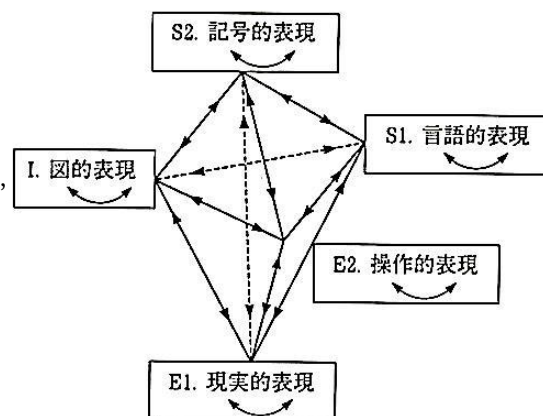


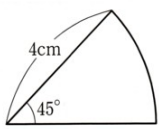
図1 数学教育における表現体系

そこで、図1の数学的表現の中でも問題把握、及び解決の方向性を導く媒介になるであろう図的表現、言語的表現、記号的表現の育成について考察したい。特に図的表現が、自ら表現できるようになれば、それらを探求の道具として活用することが予想できる。これは、解決の見通しを持つために必要なスキルでもある。しかし、上記の3点に絞り数学を学習させるつもりはない。あくまでもバランスを考えながら表現体系を習得させることが大事なことを、このモデルも示しており、そのどちらかが欠けることがあってもならない。それらはすべて、数学的表現において必須となる素地だからである。上記の3点をバランスよく表現させるため「ひらめきシート」と名付けたワークシートを活用する。

(2)「ひらめきシート」とは

松元新一郎(2009)は「数学的な表現」を、対象となるものを図、表、グラフや記号、用語などの数学特有の言語で表したものとした。また、数学用語や数学特有の言い回しなども数学的な表現に入るものとし、数学的な表現力を①「かく力」②「読む力」③「伝える力」と示した。その「数学的な表現力」を育成するためには、まず、数学的な表現である図、表、式、グラフの指導が肝心だとしている。

そこで「ひらめきシート」を使い、生徒が、図形に関してどの程度、表現できるかを調べてみる。内容は、大きく4つの変換作業に大別し構成してある。そして、学年における系統性に配慮したものになっている。

作業	意図	例
①言葉→図	文章から図を想起してかく。 解決に必要な図をかける。(かく力)	一辺が2cmの正方形をかく
②言葉→式	言葉だけでなく、課題解決の根拠として具体的な式がかける。(伝える力)	半径3cmの円の円周 式 $2 \times 3 \times 3.14 = 18.84$
③図→言葉	図が、どのような形状か数学的用語を用いながら表現できる。 (読む力、伝える力)	 半径4cm, 中心角45°の おうぎ形
④図・式→言葉(数量)	図形に関係している数量を読み取る。 (読む力、伝える力)	縦の長さ acm 横の長さ bcm の 長方形における ab

①言葉→図…場面を図にすることの難しさを体感する。

図の表し方 ○空間→平面 ○平面→空間 ○平面→平面……場면을図に表現することを継続的に指導する。

②言葉→式…課題解決の根拠を示すため、言葉だけでなく、判断の根拠や理由を示しながら考えを述べることに課題があることは各種調査でも指摘がある。

③図→言葉…自分の見た図形を相手に伝えることができるかを体感する。

④図・式→言葉(数量)…問題を選別し、図形の範囲で数量を表現させる。

・ ab →1個 a 円のリンゴを b 個買った場合の代金の合計の類は数と式の領域で構成。

・ ab →長方形の縦を acm , 横を bcm としたときの面積のような図形に関連した内容に厳選。

V 検証授業

数学科学習指導案

平成27年12月18日（金）第5校時

宜野湾市立宜野湾中学校 1年7組

男子 17名 女子14名 計31名

授業者 吉野 典子

指導助言者 伊禮 三之

1. 単元名 平面図形(東京書籍)

2. 教材名 「おうぎ形の面積」

3. 単元の見方

- (1) 観察、実験などの活動を通して平面図形の性質や関係などに関心を持つ。
- (2) 平面図形の基本的な性質を用いて、事象を論理的に考察し、具体的な場面で基本的な作図を活用することができる。
- (3) 平面図形を移動し、角の二等分線や線分の垂直二等分線、垂線などの基本的な作図や、おうぎ形の弧の長さや面積を求めることができる。
- (4) 直線や角についての基本的な用語の意味を知り、その表し方を理解する。

4. 単元の評価規準

数学への 関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	数量や図形についての 知識・理解
様々な事象を平面図形でとらえたり、それらの性質や関係を見いだしたりするなど、数学的に考え表現することに関心をもち、意欲的に数学を問題の解決に活用して考えたり判断したりしようとしている。	平面図形についての基礎的・基本的な知識や技能を活用して、論理的に考察し表現するなど、数学的な見方や考え方を身に付けている。	基本的な作図をしたりするなどの技能を身に付けている。	平面図形についての性質や関係、基本的な作図の方法、平行移動や対称移動および回転移動を理解し、知識を身に付けている。

5. 単元について

(1) 教材観

本単元では、小学校で学んだ図形学習を振り返り、基礎的な図形の性質をとらえる見方から、より与えられた条件式に基づき正確にとらえることができるようにしていく。図形については、具体的なものの操作活動を通して直観的に判別したり、その性質を小学校で調べたりしてきている。特に高学年では、様々な図形について細かい観点から辺や角の関係を調べ、平行線や三角形の作図について学んできている。中学校1学年では、図形に用いる記号や用語を理解し、それらを活用することによって図形を表現することができるようにする。こうした過程を通して、図形の問題を抽象化しながら、論理的に考察する態度を培っていくことが求められる。また、図形の作図作業を通して、図形を与えられた条件を満たす点の集合としてとらえることができるとともに図形の平行移動、対称移動等を考

えることで、動的なとらえ方もできるようにする。さらに、振り返り活動を通して、図形が条件を満たす点の集合体としてとらえる見方のよさを味わうとともに、図形が条件を満たしているか、論理的に説明ができるようにしていく。

本単元における学習活動は、次年度以降に学習する図形の証明や図形の合同・相似の学習の論理的思考の基礎となる重要な教材である。

(2) 生徒観

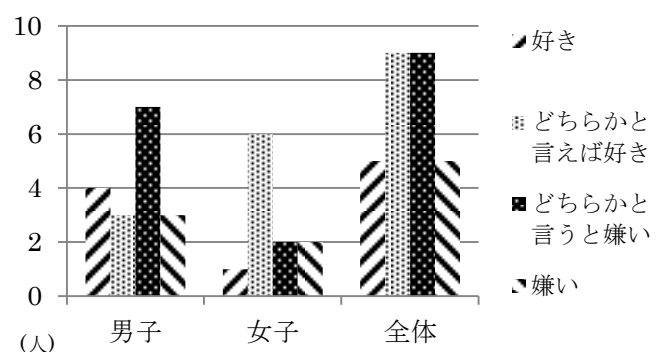
中学校に入学して、初めての図形領域を学習するにあたり、生徒自身のレディネスと実態把握のため、アンケート調査（11月5日(木)28人実施）を行った。

そこで「①図形の学習に対する意識 ②問題を解決するにあたり絵や図形イメージすることへの意識 ③ひらめきシートから見えた実態」の三つの観点から得られた実態を考察してみた。

① 図形に対する意識

Q1.「図形の学習は好きですか？」の質問に対して、次のような結果になった。

全体 好き 18%
 どちらかと言うと好き 32%
 どちらかと言えば嫌い 32%
 嫌い 18%



また、その理由として以下のような回答が得られた。

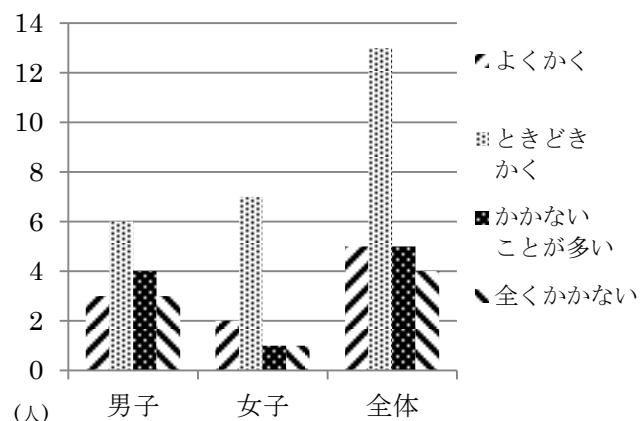
好き，どちらかと言えば好きと答えた理由	嫌い，どちらかと言えば嫌いと答えた理由
・何かおもしろい。 ・面積を求めるのが解けると楽しいから。 ・面積を求めるのが好き。 ・面積や体積を求めるのがおもしろい。 ・ポイント（やり方）さえつかめればやりやすいから。 ・コンパスで測るのが大好き。計算は、まあまあだけど楽しいから。 ・図形をかくのが好き。 ・コンパスなどを使うのが好き。 ・計算より簡単だから。 ・まだましな方だから。 ・図形はいろいろなものを測るときに便利。 ・図形はわかりやすく、問題が解きやすいから。	・求め方があまりわからない。 ・ちょっと難しいから。 ・図をかいたり計算するのが面倒くさい。 ・作図はコンパスを使うのが面倒くさいし、わざわざ面積を求めるのも嫌。 ・計算が苦手，難しい。 ・計算がわかりにくいから。 ・意味がわからない。 ・こんがらがう。 ・例えば円の面積や円周率を求めないといけないから。 ・÷2とか複雑な計算が入ってくるから。 ・コンパスが使えない。 ・角度を求める時が難しい。 ・公式？計算のやり方が意味わからなくなる。 ・計算は好きだが，かくのが嫌い。

〈考察1〉図形の学習において、クラスの半分が「好き」と回答している。（どちらかというとも含む。）一方、残り半分は図形の学習を「嫌い」と回答している。（どちらかというとも含む。）その「嫌い」と回答した原因は、図をかくことが面倒くさいと感じていること。道具を使うコンパスでの作図やかく作業への抵抗感などを感じる。言い換えれば、条件で示された図形が頭の中にイメージ（可視化）できないことが要因になっている場合もあり得ることなどが読み取れる。

② 問題を解決するにあたって、絵や図をイメージしているかの意識

Q2.「問題を解決するとき絵や図をイメージしてかきますか？」の質問に対して、次のような結果になった。

全体 よくかく 18 %
 ときどきかく 46 %
 かかないことが多い 18 %
 全くかかない 14 %
 無回答 4 %



また、理由として、以下のような回答が得られた。

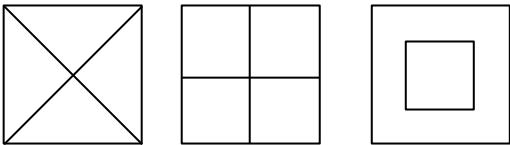
絵や図をイメージしてかくと答えた理由	絵や図をイメージしてかかないと答えた理由
・わかりやすく、意味を知って覚えられるから。 ・かいた方が求めやすいから。 ・図をかいた方がわかりやすい。 ・頭の中でイメージできる。でも難しい問題は、かくとわかりやすい。 ・かいた方がわかりやすい。 ・イメージだけで解決できないとき。 ・文章問題など頭にイメージしやすいから。 ・イメージしたら、わかりやすいから。 ・問題だけだと、全然意味わからない。 ・わかりにくいときに使う。 ・かけないと解けないから。 ・頭の中で絵とか図をイメージすると、すらすら解きやすいから。	・まず、式にして表すから。 ・頭の中でごちゃごちゃしてくるから。 ・面倒くさいから。 ・数学嫌いなのに、絵や図をかいたりしたら、もっとごちゃごちゃになるから。

〈考察2〉生徒の半数以上（64％）は「問題解決の際、絵や図をイメージとしてかく」必要性を実感している。しかし、絵や図をかくことに面倒くさいと感じて、図形そのものをおかず、イメージができていない状態で問題を見ている様子が伝わる。それは、前述のQ1での回答にも同様の傾向が表れている。

また、絵や図をかくことで余計に混乱する、と回答している生徒もいる。これは、問題文から本当に必要な条件や情報をくみ取れない状態を意味している。絵や図をかくことが思考を促進する道具になり、それを利用することが問題解決につながることを多く味わせたい。

③ ひらめきシートから見えた実態

生徒は、実に多くの思考を自分なりに表現してくれるが、具体的にどのように表現させたら問題解決に結びつくのか、また、よりよい表現技法を身につけさせる手法はないか、などを考え「ひらめきシート」を作成した。そこから、3つのパターンで情報をうまく表現できずに、支障をきたしていることが読み取れた。そのパターンを3つのカテゴリーに分類してみた。ただし、紙面の関係上で全ての具体例を提示することはできないので「ひらめきシート Part1」言葉→図形、図形→言葉に変換する2つの作業から、実態を考察、整理するものとする。

パターン	具体例	問題把握における困難性尺度
①情報不足型 わかっている情報を、すべて記入していない場合。	・立方体の見取り図が正方形 ・球体（空間図形）が円（平面図形） ・辺の長さ、角の大きさが、きちんとかかれていない。	低い
②用語不足型 今までに習った用語、単位を使わず表現している場合。 あるいは用語の意味を理解していない、忘却している場合。	・対角線という用語を使わず、かどとかどを結ぶと表現。 ・おうぎ形の半径を底辺と表現。 ・単位をきちんとかかないで表現。あるいは単位を使いこなせていない。 ・図形の名称が、かかれていない。	高い
③誤認識型 文脈を読み取り、図で表す作業に困難が見られる場合。	・正方形の各辺の中点を結んでできる四角形を下の図のように解釈して書いている。 	高い

〈考察3〉 問題解決の前段階に相当する「問題把握」の困難性が高いと感じられるのは③誤認識型で、その次に②用語不足型、最後に①情報不足型だと考えられる。まず、第一に③誤認識型は、読解力や解釈することにおいて支障をきたしているため、問題解決に至るには、ほど遠いと感じられる。また、②用語不足型は、問題の中に出てくる情報をうまく活用できないために、処理するための訓練が必要になってくる。これは数回の「ひらめきシート」による訓練で補うことができるだろう。①の情報不足型は以前、情報について学んだ経験があり、それを使いこなす感覚も身に付けているが、面倒くさがりが先行し、全ての情報が「視覚化」されていない。そのため、問題を解く大事な部分を見落とし、問題解決に至らないことが起こりうる。問題解決をスムーズに行うために、実はその情報が鍵を握っていることを意識させながら、情報を図の中に書き込んでいく指導を繰り返すことで改善できるものと思われる。

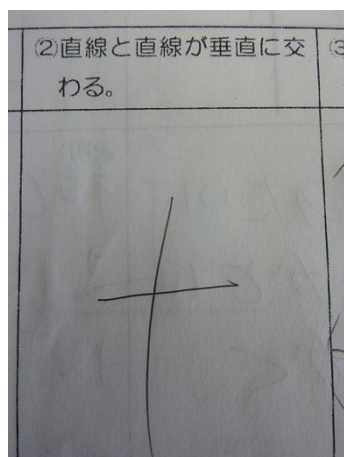


図2. 情報不足型

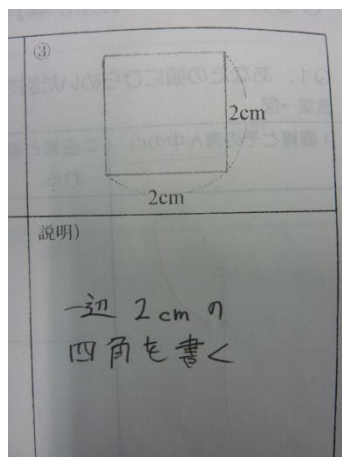


図3. 用語不足型

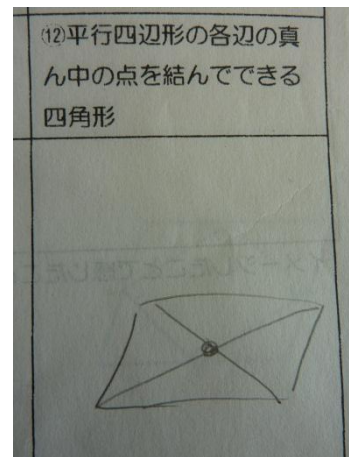


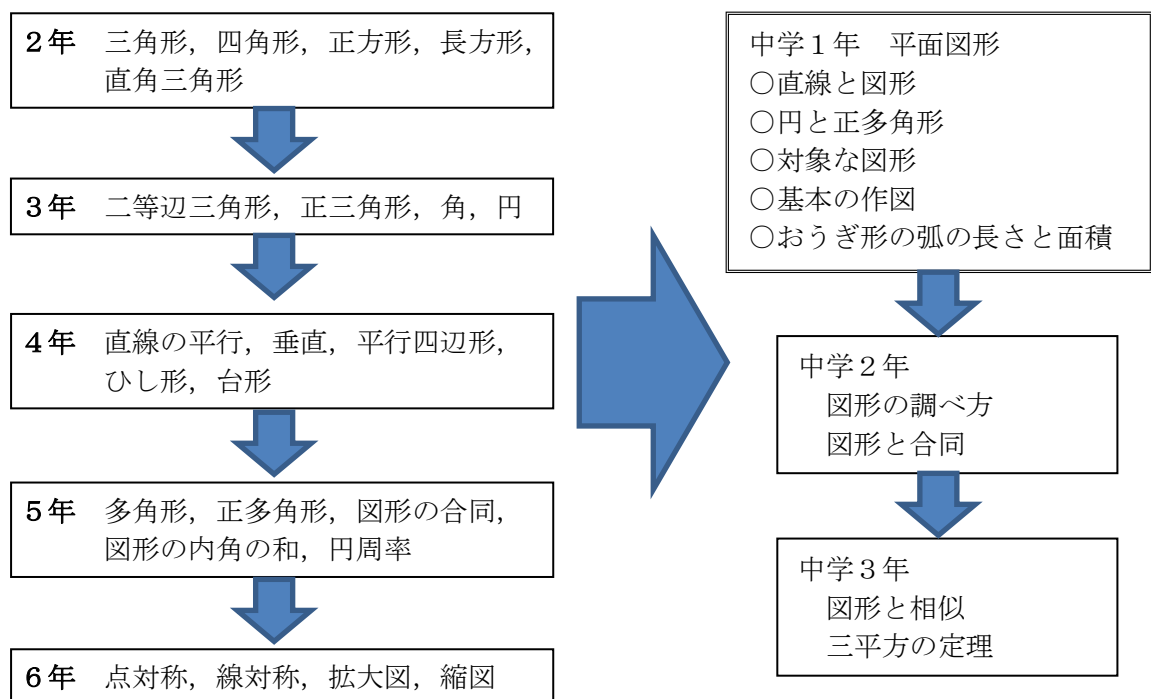
図4. 誤認識型

(3) 指導観

生徒の中には、図形問題を苦手とする生徒も多く、アンケートの実態から、図形の学習＝「面積を求めること」「体積を求めること」という意識が強いと思われる。小学校での基礎的な学習を補いながら、抽象的、論理的な考え方や見方を育む指導を心掛けたい。具体

的には、実物の図形で辺の長さ、角の大きさを確認する活動から始めたい。また、多角形が点と点を結んでできていることを基本としながら、具体的な図形の移動を操作活動による各自の敷き詰め作品を作りながら学ばせたい。作図指導においても、手法の指導に終始する形式的な作図指導で終わらないよう、根拠となる考え方を十分指導したい。線が点の集合であることを確認しながら、垂直二等分線、角の二等分線の意味を理解させる作図指導を意識したい。具体的には、作図の前におおよその概形をイメージさせ、実際の垂直二等分線、角の二等分線を作図した上にマグネットをいくつか置き、それぞれの線が持つ意味を理解させるような流れで指導をしたい。さらに、アンケートの回答から、図形に対する苦手意識や抵抗感を払拭できるような授業の工夫改善を行いたい。そのため、具体的な図形の操作活動や作図活動に取り組みさせることで、生徒自身が身近にある図形について興味を示し観察、探求する楽しさを味わせたい。

6. 単元の内容構造図(平面図形)



7. 単元の指導・評価計画(東京書籍)

節	項	時数	学習内容	用語・記号
1 図形の移動	①図形の移動	5	○敷き詰め図を作ろう ・合同の意味 ・できた敷き詰め図から、3つの移動（ずらす、回す、裏返す）で敷き詰められていることに気づき、理解すること ○図形に関するいろいろな記号や用語の使い方 ・直線と角についての用語や意味を理解し、記号を用いて表記すること ・直線、線分、半直線の意味 ・2点 A, B 間の距離 ・線分の長さが等しいことを式で表すこと ・角の表し方と、角の大きさが等しいことを式で表すこと ・垂線の意味と、垂直であることを式で表すこと ・中点と垂直二等分線の意味	直線 AB, 線分 AB, 半直線 AB, 平行移動, △ABC, //, 回転移動, 回転の中心 ∠AOB, 対称移動, 対称の軸,

2 基本 の 作 図			○図形の平行移動とその特徴 ・平行線の意味と、平行であることを式で表すこと ・平行移動の意味とその性質 ・平行移動させた図形をかくこと	垂線、 $\perp$ ， 中点，垂直 二等分線
			○図形の回転移動とその特徴 ・回転移動，回転の中心の意味 ・回転移動の特徴 ・回転移動させた図形をかくこと ・点対称な図形と回転移動	
			○図形の対称移動とその特徴 ・対称移動，対称の軸の意味 ・対称移動の特徴 ・対称移動させた図形をかくこと ・線対称な図形と対称移動	
	①作図の方法	1	○定規とコンパスで，どんな図形がかけられるか考える ・作図における定規やコンパスの使い方 ・円の意味とその特徴 ・弧の意味とその表し方 ・弦の意味 ・作図の意味	弧 AB， $\frown$ ， 弦
	②基本の作図	4	○作図の方法を考え，交わる2つの円の性質について考える ・円が線対称な図形であること ・交わる2つの円の性質について調べる ○垂線の作図について考える ・交わる2つの円の性質を利用し，直線上にない点から直線への垂線を作図すること ・点と直線との距離，平行な2直線の距離の意味 ○垂直二等分線の作図について考える ・交わる2つの円の性質を利用し，線分の垂直二等分線を作図すること ・2点からの距離が等しい点は，その2点を結ぶ線分の垂直二等分線上にあること ○角の二等分線の作図について考える ・交わる2つの円の性質を利用して，角の二等分線を作図すること ・角がつくる2つの半直線からの距離が等しい点は，その角の二等分線上にあること ・直線上の点を通り，その直線に垂直な直線を作図すること	(角の) 二等分線
	③いろいろな作図	1	○基本的な作図を利用して，いろいろな作図を考えてみよう ・接する，接線，接点の意味 ・接線の性質 ・接線の性質を利用して接線を作図すること ・あたえられた条件の点を，作図を利用して求めること ・具体的な問題を，作図を利用して解決すること	接する， 接線，接点
3 おう ぎ 形	①おうぎ形	3	○円を折り曲げてみよう ・おうぎ形やおうぎ形の中心角の意味 ・おうぎ形の弧の長さや面積が中心角に比例すること	おうぎ形， 中心角
		本 時 2/3	○おうぎ形の弧の長さと面積 ・おうぎ形の半径と中心角から面積を求めること ・おうぎ形の半径と中心角から弧の長さを求めること	

8. 本時の指導（13／14時間）

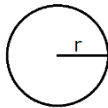
（1）本時のねらい

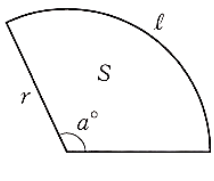
おうぎ形が円の一部分だということを理解し，面積の求め方を理解する。

(2) 授業仮説

図形（おうぎ形）を、イメージするいくつかの場面を設定することで、問題把握が容易になり、元の円（全体）とおうぎ形（部分）の関係に気づき、面積を求めることができるであろう。

(3) 本時の展開

段階		指導内容	学習活動	指導上の留意点・評価等
導入 8分	理解 ↓ 計画 ↓ 実行 ↓ 検討	級長による挨拶・号令 ねらい、GOAL を書く。 ・どのおうぎ形が大きい？ イメージ① 半径 3cm，中心角 30° 半径 3cm，中心角 60° ※同一半径による比較 イメージ② 半径 3cm，中心角 45° 半径 6cm，中心角 45° ※同一角による比較	ねらいと GOAL は休み時間で板書済み。 黙想 30 秒間(語先後礼) ねらい：おうぎ形の面積の求め方を理解する。 GOAL:おうぎ形が□の一部分であることを理解し面積を求められる。 どちらの面積が大きいかをイメージする。【図式化①】 半径の長さ，中心角の大きさを図の中に書き込む。	・始業時のけじめ， ・ノートを準備，不要な道具を机に入れる。 ・根拠を示すとき，数学用語(半径，中心角など)を用いているかを確認。うまく説明できない生徒→「この部分をなんと言いましたか」「何で大きさを判断しましたか」などの質問をする。【メタ認知①】
	展開 5分	家で Pizza パーティーをします。どんな形にして分けられますか？ 食いしん坊のジャイアンが、どのピザを食べようか悩んでいます。 PizzaA イメージ③ 半径10cm，中心角 45° PizzaB イメージ④ 半径12cm，中心角 30° 円について 円周= $2\pi r$ 面積= πr^2  円に関する用語を確認 ①中心 ②半径 ③直径 ④円周など おうぎ形の面積って、どうしたら求められるかな？	S1：おうぎ形 S2：正方形… T：どの Pizza 食べたい？ S1：PizzaA S2：PizzaB S3：？ T：理由は？ S1：美味しそう。S2：トッピングが好き。 S3：大きいから。 PizzaA,B を切る状態からイメージする。 【図式化②】 T：もしも，生地の高さが均一でない場合，どうなるかな。 S1：わからない。S2：厚い方がお得。 S3：厚くても中身がないタイプだと損 T:2つの Pizza のイメージで判断できた？ A だと思う人？(挙手させて確認) B だと思う人？(挙手させて確認) 同じだと思う人？ 手が上がらない人がいるけど…。 T：どのように判断したらいい？ S1：重さを測る。 T：秤がなければ？判断できないね。 S2：面積を求めてみる。 T：PizzaA と PizzaB のおうぎ形は，半径と中心角がわかっているみたいだけどおうぎ形の面積ってどうやって求めたらいいんだろうね。	・一般的に，おうぎ形に切って食べることで進める。 ・問題配布，掲示，貼り付け。 ・問題は，図でイメージを図る。 ・Pizza 生地の厚さは均一であることを確認する。 ・「以前，見たことがある図形だけ…」 「Pizza を切る前の形は？」 「イメージで判断できる？」 自力解決できるような働きかけを促す。【メタ認知②】 〈発問①〉 長方形→縦5m，横20m 正方形→一辺10mの土地はどちらが広い？ ・2つの図形を比較するときには面積の概念が大事なことを押さえる。 ・PizzaA，PizzaB についてわかっている条件は何か？【メタ認知③】 ・活動の様子を探りながら，小集団指導(理解が困難な生徒対象)を行う。机の前に集合させる。Pizza を切る前の形に帰着。 ・ひらめきシートでかいたことの
10分	計画 実行			

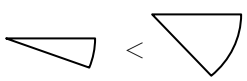
10分	検討	【自力解決】	S1：うん。確かに。S2：… T：では、PizzaA, PizzaB のおうぎ形の面積の求め方を、さっき書いた図【図式化②】を使って、考えを挿入してみましょう。【図式化③】	ある図をイメージさせる。 (正方形を4等分した図…) ・反応が乏しいときは、具体的な中心角の大きさを提示。 例) 90° で切る場合 $\rightarrow \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ 60° で切る場合 $\rightarrow \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ ・電卓が必要な生徒には、電卓を使用させる。
10分		【協同学習】 ホワイトボード配布 PizzaA の面積 $10 \times 10 \times \pi \times \frac{45}{360} = 12.5\pi$ (cm^2) PizzaB の面積 $12 \times 12 \times \pi \times \frac{30}{360} = 12\pi$ (cm^2)	T: それでは、どのようにしておうぎ形の面積を求めたのか、自分の考えを、お友達に説明して下さい。3人グループを作して下さい。 各グループのホワイトボードを黒板に貼り付けて、どのように考えたか全員で確認する。 解法が同じ場合 $\rightarrow$ 代表グループによる説明 解法が異なるもの $\rightarrow$ 各グループによる説明 よって、ジャイアンは PizzaA を食べた方がいい。 本日の GOAL の空欄を一緒に埋める。 T: では、天秤があります。実際に乗せて重さを確認してみましょう。 A が重いことを確認する。	・計算で 360 や中心角に単位°をつける生徒がいる。計算式の中では省く指導。 ・各グループの考え方から、円とおうぎ形の面積の関係を確認。半径が等しい円とその一部分でできたおうぎ形は、中心角に比例している。 ・カラーボードで作られた Pizza の模型を天秤に乗せて重さを測ってみる。
まとめ 7分		おうぎ形の面積 $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$ 	Point おうぎ形は円の一部分で面積は中心角に比例している。 宿題 PizzaA, PizzaB のおうぎ形の弧の長さを求めなさい。	・次回はおうぎ形の弧の長さについて調べてみようと思欲喚起を図り終わる。

(4) 板書計画

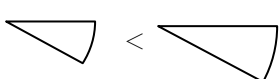
12/18 (金) おうぎ形の面積
ねらい おうぎ形の面積の求め方を理解する。

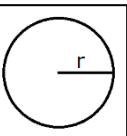
GOAL おうぎ形が の一部分であることを理解し、面積を求められる。

半径 3cm, 中心角 30°
半径 3cm, 中心角 60°



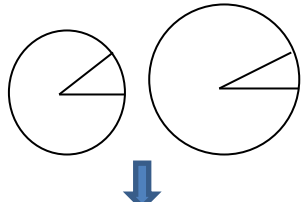
半径 3cm, 中心角 45°
半径 6cm, 中心角 45°



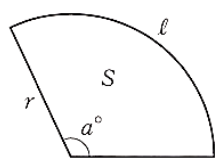
円について
円周 = $2\pi r$
面積 = πr^2


食しん坊のジャイアンが、どのピザを食べようか悩んでいます。

A 半径 10cm, 中心角 45°
B 半径 12cm, 中心角 30°

イメージ


見通し
面積を比較する。
重さを測る…

Point おうぎ形の面積
 $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$


Gr1	Gr2	Gr3
Gr4	Gr5	Gr6
Gr7	Gr8	Gr9

VI 仮説の検証

問題把握力を高める数学的な表現指導の工夫
—文脈を図式化する活動を通して—

問題把握の場面で、問題の内容を可視化（略図化）する活動を行えば、思考を助ける数学的な表現の良さに気づき、主体的になって問題解決ができるであろう。

本研究では、問題解決のスタート地点である「問題把握」に焦点を絞り図形をイメージすることを意識した授業展開をしてきた。しかし、実際にはイメージすることが容易でなかったり、曖昧だったりする生徒もいる。特に、文脈を読み取り言葉→図形に変換する作業は、図形の問題を解決できるか否かを握る重要な作業になってくる。その「問題把握」の場面で、どのような手立てを行い、そこに立つこともままならない生徒へは、どのようにスタートラインへ誘導するかを探ってみたいと考え検証を行った。具体的には、検証前後のひらめきシート、授業実践と生徒観察、アンケート調査結果などから、どの程度、問題把握力が高まったかを検証する。

(1) ひらめきシートによる検証

前述した、①情報不足型 ②用語不足型 ③誤認識型の3つの具体例は、それぞれ別の生徒である。その3人をA, B, Cとして、ひらめきシート Part1 による変容を見てみる。

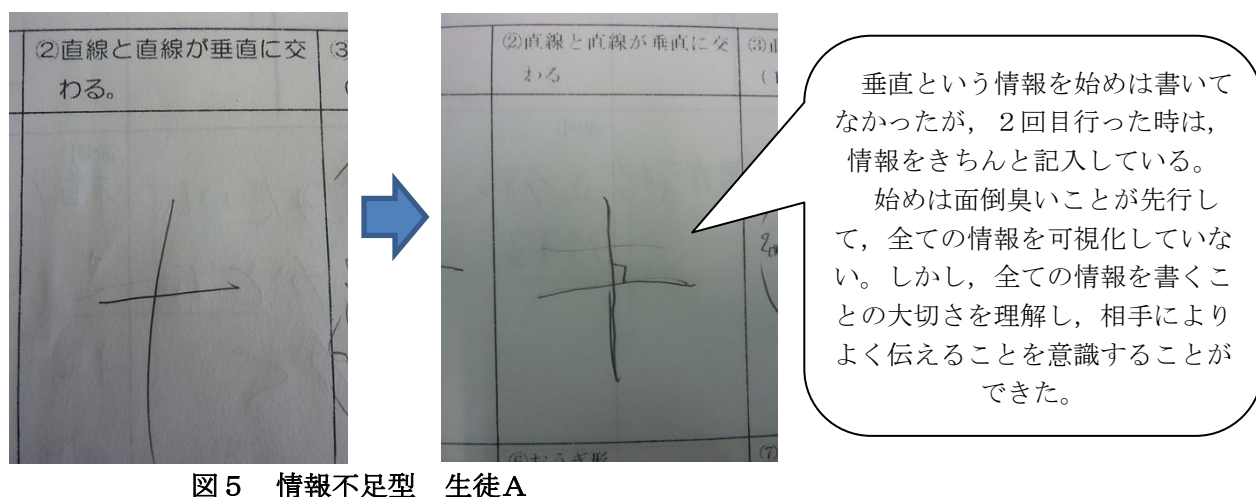


図5 情報不足型 生徒A

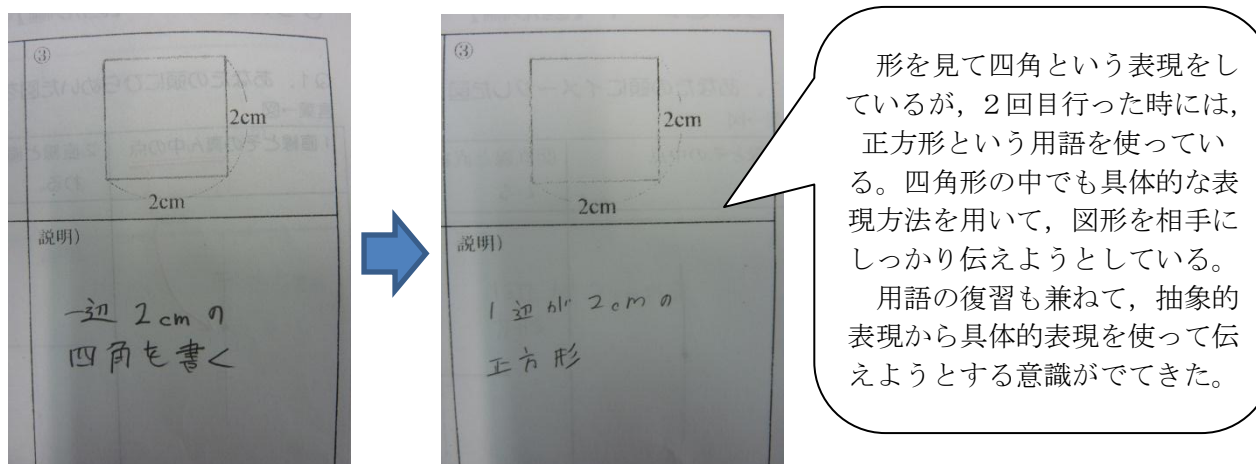
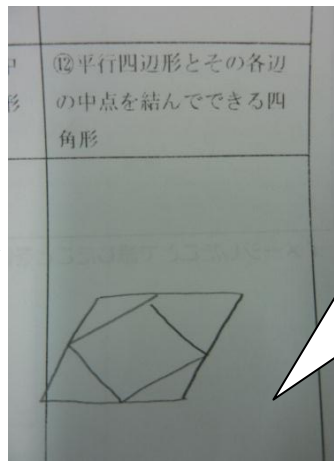
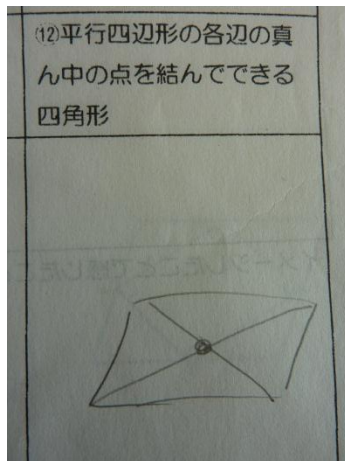


図6 用語不足型 生徒B



2回目の実施の際には、中点と言う用語も学習したので、それも理解しているかの確認も兼ねて、文言を変え実施した。

始めは、平行四辺形の対角線を引く解釈でかいている。2回目行った時には、文脈を読み取り、イメージした四角形をかくことができています。

図7 誤認識型 生徒C

(2) 授業実践と生徒観察による検証

いろいろな問題状況をイメージするための前段階として、実物の図形による辺の長さや、角の大きさ、特徴を把握することから行い、イメージが容易になる授業の流れを意識した。具体物として、図8のようなCardBoard(厚紙)で作った三角形、四角形、円などの図形を手に取り、イメージとのズレを感じることから始めた。実際に折り紙を折り、線対称な図形の特徴や、おうぎ形が円の一部分になっているイメージを作った。その後は、実物が無くてもイメージが容易になったと思われる。図10は、円を4等分する図を書く前に、イメージしている様子である。そして、図11は検証授業当日、生徒が発表したホワイトボードである。この様子からも検証授業の仮説「図形(おうぎ形)を、イメージするいくつかの場面を設定することで、問題把握が容易になり、元の円(全体)とおうぎ形(部分)の関係に気づき、面積を求めることができる」は、おおむね達成できたと考えられる。

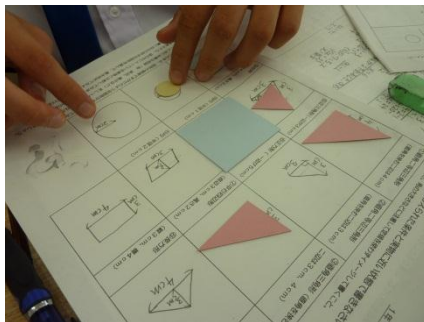


図8 実物に触れる



図9 実物で試してみる

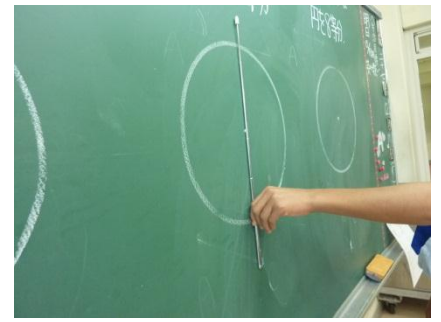


図10 イメージしてみる

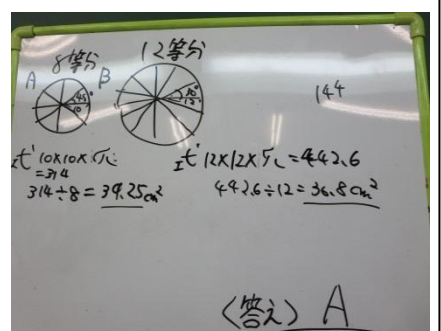
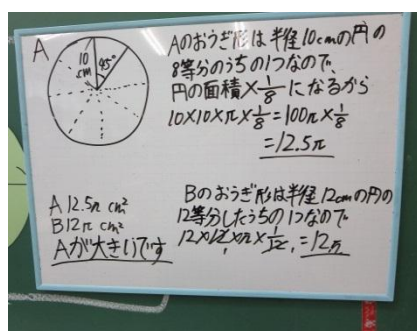
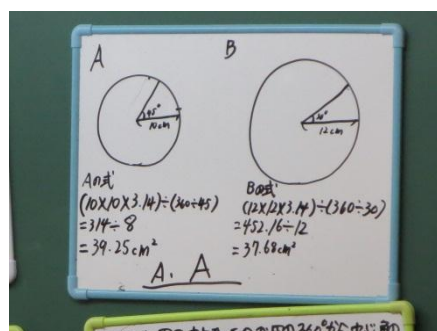


図11 ホワイトボード

(3) アンケートから見えた検証

検証授業終了後、検証による意識変容把握のため、アンケート調査(12月22日(火)29人実施)を行った。内容は、前述の生徒の実態把握のために用いた内容と同じものである。

図形に対する意識「図形の学習は好きですか？」	
・好き(18%→17%)	・どちらかと言えば嫌い(32%→31%)
・どちらかと言えば好き(32%→46%)	・嫌い(18%→6%)
〈好き・どちらかと言えば好きと回答した理由〉 ・きれいにできた時の達成感があるから。 ・簡単だから。 ・楽しいから。 ・わかりやすいから。 ・文章問題と違って問題がわかりやすい。 ・文章問題よりはいい。 ・かけたら嬉しいから。 ・計算するより何かを作る方が好きだから。 ・図形が書けるから。 ・問題を解きたいから。 ・図形を書くための方法とか、計算式をするのが少し楽しい。 ・面積や体積を求めるのが好きだから。 ・自分の思考力を思い切り使う学習だから。 ・図形の面積などの計算があるから。 ・計算式などは好きでないから。 ・目の錯覚で、立体に見えたりしておもしろいから。 ・最近、かき方や解き方がわかるようになったから。	
問題を解決するにあたって、絵や図をイメージしているかの意識 「問題を解決するにあたって、絵や図をイメージしてかきましたか？」	
・よくかいた(18%→10%)	・かかないことが多かった(18%→14%)
・ときどきかいた(46%→69%)	・全くかかない(14%→7%)
〈よくかいた・ときどきかいたと回答した理由〉 ・かいた方がイメージしやすいから。 ・かいた方がわかりやすいから。 ・かいたらこういうことになっているんだ。と図形を理解できるから。 ・イメージすると頭に入ってくるから。 ・イメージしておくとうわかりやすい。 ・わかりやすくなるから。 ・図があった方がわかりやすい。 ・そうした方が、かきやすいから。 ・その方がわかりやすいから。 ・イメージすることで理解できた。 ・図で表したりする方が頭に入りやすいから。 ・頭でイメージするより、イメージ図をかいて解いた方が、間違いが少ないと思うから。 ・問題に絵や図があるのも多いので時々かいた。 ・文だけだと、イメージがわからないから。 ・教えてもらって、わかるようになったから。 ・想像しにくいものもあったから。 ・想像しやすいため。	

〈結果〉

図形の学習が「嫌い」と回答した生徒が激減した。同時に「どちらかと言うと好き」と回答した生徒も増えた。検証前は、図形の学習に対しての抵抗感があったが、ある程度払拭できたものと思われる。また、絵や図をイメージして問題を解く意識についても、「ときどきかく」生徒が増え、「全くかかない」生徒が半減したことは、かく事への意識も高まっている様子が見られる。そして、問題解決するにあたり、絵や図をイメージすることが、問題把握につながっていることを生徒自身が感じている様子が見られる。これは、思考を助ける数学的表現の良さに気づいているといえるだろう。

一方、図形のかき方がわからないから図形の学習が嫌いと答える生徒もいた。見たことはある形だけど、どのように表現したらいいのか。という困難さを解消するには、図形を考える際のポイントが網羅されている「ひらめきシート」を活用し、個別の補習、宿題等で取り組ませる必要がある。また、別質問「今回の図形で学習したことが、普段の生活の中で役立つと思いますか」では「家でピザを等しく分ける場合に役立つと思う」と回答した生徒もいる反面「図形を生活の中で使わないから」とか「使う場面がないから役に立つと感じていない」と回答する生徒もいた。今後、生徒が実生活の中で、図形に限らず数学を使う場面を想定した授業づくりを意識したい。それにより、生徒のモチベーションが高まり、学習効果も期待できる。

(4) 検証のまとめ

問題文を読んで、ただ向き合うのではなく、そこに隠れている図形や情報をしっかりとイメージし、かくことが解決につながることを生徒が感じることができた。イメージさせるための手立てとしては、具体物による操作を取り入れた活動を多く取り入れ思考を促進させることである。具体物は教師のオリジナリティーで手軽に入手、準備できるものを活用する。生徒の生活に即した教材は、数学がいろいろな場面で活用されていることに気づき、興味関心を高めることができる。今後、自らの思考を整理し、表現するツールとして、図や言葉、式をどのように利用すれば、理解でき、相手にわかりやすく伝えることができるかを知ること、より数学的な表現力を高めることが期待できると思う。

Ⅶ 研究の成果と今後の課題

1 研究の成果

- (1) 問題解決の際、より多くの具体的操作を取り入れ、図をイメージし、それを可視化する作業が思考を助けることに気づき、表現することの良さを生徒が感じることができた。
- (2) 「ひらめきシート」を活用することで、生徒は問題を解決するために必要な図の利用、課題の解決に有効な情報を選択し図で表現できるようになった。
- (3) 「ひらめきシート」は、図形指導を行う際のよい参考資料、かつ教材となった。
- (4) 生徒の実態調査の結果から図形の学習が好き、どちらかというと好きとする生徒が増え、図形の学習におけるモチベーションが高まった。
- (5) 実生活に即した教材を意図的に使い、普段の生活の中でも図形を考えられるように工夫を凝らし、生徒の知的好奇心を刺激することができた。

2 今後の課題

- (1) 問題がしっかり把握できているかを効率よく確認するためには、すぐにインプットするような授業の工夫が必要である。即ち、ICT を活用し、文脈にでてくる図が、どのような図形になるかを全体で確認する工夫と手立てが課題として残された。
- (2) 誤認識型の生徒の問題把握力を高めるには、読解力との関わりが出てくるので、数学だけでなく他教科との連携の方法を、どのように行うかを研究する必要がある。
- (3) 「ひらめきシート」でイメージをアウトプットした後、すぐに正しい表現の仕方をインプットできるように、より有効な活用方法が求められる。
- (4) 「ひらめきシート」の分析を生徒別、問題別で行い、今後の指導に役立てる。

<主な参考文献>

- 中原忠男 1995『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』（聖文社）
清水静海 2009『平成 20 年改訂中学校教育課程講座数学』（ぎょうせい）
OECD 教育研究革新センター 2015『メタ認知の教育学』（明石書店）
相馬一彦 2009『新 問題解決の授業に生きる問題集』（明治図書）
松元新一郎 2009『中学校新数学科 数学的な表現力を育成する授業モデル』（明治図書）
市川伸一 2015『教えて考えさせる算数・数学』（図書文化）

<参考URL>

- 国立教育研究所『H27 年度 全国学力・学習状況調査の調査結果のポイント』
<http://www.nier.go.jp/15chousakekkahoukoku/hilights.pdf>
http://www.edu-c.pref.miyagi.jp/longres/H15_A/pdf/gkgb28.pdf#search='%E5%95%8F%E9%A1%8C%E8%A7%A3%E6%B1%BA%E5%AD%A6%E7%BF%92